

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(СИБСТРИН)

А.П. Воробьева

**Стандартные численные методы
решения задач с использованием пакета
MathCad (электронное издание)**

Лабораторный практикум

Новосибирск 2018

Лабораторный практикум предназначен для студентов направления «Строительство» очной формы обучения, изучающих дисциплину «Информатика».

Практикум содержит задания для лабораторных работ по численным методам и образцы их выполнения. При выполнении лабораторной работы студент выбирает вариант задания в соответствии с указаниями, приведенными в лабораторной работе. Отчет выполнения лабораторной работы оформляется в пакете MathCad по приведенному образцу и сохраняется в файле.

Для освоения теоретического материала рекомендуется использовать пособие: **Методы вычислений в пакете MathCAD** : учебное пособие / И. А. Бедарев, Ю. В. Кратова, Н.Н. Федорова, И.А. Федорченко ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2013, - 168 с.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

«РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Задание

Дано нелинейное алгебраическое уравнение $f(x)=0$.
Используя методы:

- деления отрезка пополам (дихотомии);
- Ньютона (касательных);
- простой итерации (релаксации),

найти приближенные значения корней с заданной точностью ε .

Провести анализ полученных результатов.

Примечание. Номер варианта задания выбрать из таблицы в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

1. В пакете MathCAD создать файл с именем «**Нелинейные уравнения**».
2. Исследовать функцию $f(x)$ на наличие корней *графически*. Определить интервал наличия всех корней.
3. Найти интервалы изоляции *табличным способом*.
4. Для каждого интервала изоляции $[a_i, b_i]$ с заданными степенями точности ($\varepsilon = 0.01$; $\varepsilon = 0.001$; $\varepsilon = 0.0001$) найти корни уравнения с использованием: а) метода деления отрезка пополам; б) метода Ньютона; в) метода простой итерации.

Реализацию каждого метода оформить П-Ф и провести необходимые вычисления. Результаты вычислений по каждому методу занести в *три таблицы* следующего вида.

Таблица 1. Метод половинного деления

Интервал изоляции ($[a_i,$ $b_i]$)	Точность вычислений (ε)	Корень уравнения (x^*)	Число итераций (n)	Невязка метода $ F(x^*) $
$[a_1, b_1]$	$\varepsilon = 0.01$			
	$\varepsilon = 0.001$			
	$\varepsilon = 0.0001$			
$[a_2, b_2]$	$\varepsilon = 0.01$			
	$\varepsilon = 0.001$			
	$\varepsilon = 0.0001$			

	$\varepsilon = 0.01$
$[a_3, b_3]$	$\varepsilon = 0.001$
	$\varepsilon = 0.0001$

Примечание 1. Невязка метода занесена в таблицу для проверки правильности решения уравнения.

Примечание 2. При программировании метода Ньютона предусмотреть выбор начального приближения по условию.

Примечание 3. При программировании метода простой итерации включить в П-Ф вычисление параметра релаксации τ .

5. Для $\varepsilon = 0.0001$ на *втором* интервале изоляции составить таблицу (см. ниже) и провести анализ полученных результатов.

Метод решения	Корень уравнения	Число итераций	Невязка метода

Ответить на следующие вопросы.

- 1) Какой из указанных методов является более *точным*?
 - 2) Какой из указанных методов *быстрее сходится*?
6. Определить корень нелинейного уравнения на *втором* интервале изоляции с использованием встроенной функции вида **root(F(x),x,a₂,b₂)**. Проверить правильность решения, вычислив невязку уравнения. Сравнить результат с полученным ранее решением.

Примечание. Предварительно необходимо задать точность вычисления ε , присвоив значение системной переменной **TOL** := 10^{-4} .

7. Вычислить все корни уравнения с помощью встроенной функции **polyroots(v)** с точностью ε , заданной системной переменной **TOL** := 10^{-4} . Проверить правильность решения для каждого корня, вычислив невязку уравнения. Сравнить результат с полученным ранее решением.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Уравнение $f(x)=0$
1	$x^3 - 7x^2 + 0.4x + 2 = 0$
2	$x^3 - 3x^2 + 2x - 0.1 = 0$
3	$x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$
4	$2x^3 - 6x^2 - 11x - 1 = 0$
5	$0.5x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$
6	$3x^3 - 13x^2 + 12x - 3 = 0$
7	$x^3 - 5x^2 - 12x + 1 = 0$
8	$x^3 - 10x^2 - 2x + 5 = 0$
9	$x^3 - x^2 - 12x - 6 = 0$
10	$x^3 - 3x^2 - 10x + 6 = 0$
11	$7x^3 - 6.3x^2 - 15x + 2 = 0$
12	$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$
13	$x^3 - 3.2x^2 - 4x + 5 = 0$
14	$2x^3 - x^2 - 12x + 10 = 0$
15	$3x^3 - 4x^2 - 12x + 6 = 0$
16	$x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$
17	$x^3 - 5x^2 - 0.1x + 5 = 0$
18	$x^3 - 5x^2 + 4x + 0.05 = 0$

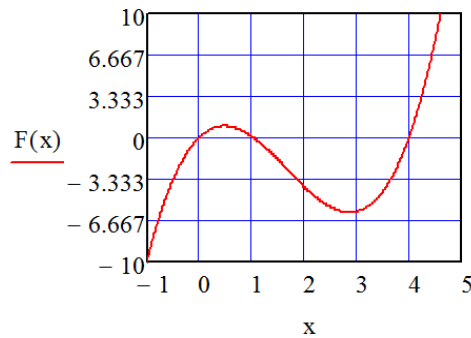
Лабораторная работа №10

"Решение нелинейных алгебраических уравнений" (образец)

Задание 2

$$F(x) := x^3 - 5x^2 + 4x + 0.05$$

$$x := -10, -9.98 \dots 10$$



Интервал наличия корней: [-1, 5]

Задание 3

```

IZ(F,a,b,d) :=
  n ← trunc((b - a) / d) + 1
  V0,0 ← "x"
  V0,1 ← "F(x)"
  for i ∈ 1..n
    x ← a + (i - 1) · d
    y ← F(x)
    Vi,0 ← x
    Vi,1 ← y
  V
  
```

$$V := IZ(F, -1, 5, 0.5)$$

V =

	0	1
0	"x"	"F(x)"
1	-1	-9.95
2	-0.5	-3.325
3	0	0.05
4	0.5	0.925
5	1	0.05
6	1.5	-1.825
7	2	-3.95
8	2.5	-5.575
9	3	-5.95
10	3.5	-4.325
11	4	0.05
12	4.5	7.925
13	5	20.05

Интервалы изоляции
 [-0.5, 0]
 [1, 1.5]
 [3.5, 4]

Задание 4

а) Метод половинного деления

$$\text{mdp}(a, b, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow 0 \\ \text{while } |b - a| > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a + b}{2} \\ a \leftarrow c \text{ if } F(a) \cdot F(c) > 0 \\ b \leftarrow c \text{ otherwise} \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ \left(\frac{a + b}{2}, n \right) \end{array} \right.$$

+

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(-0.5, 0, 0.01) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 2.437 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(-0.5, 0, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 4.25 \times 10^{-4}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(-0.5, 0, 0.0001) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 4.753 \times 10^{-5}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(1, 1.5, 0.01) = \begin{pmatrix} 1.02 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 9.349 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(1, 1.5, 0.001) = \begin{pmatrix} 1.016 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 1.145 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(1, 1.5, 0.0001) = \begin{pmatrix} 1.017 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 7.069 \times 10^{-5}$$

+

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(3.5, 4, 0.01) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 3.232 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(3.5, 4, 0.001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 2.599 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mdp}(3.5, 4, 0.0001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 4.861 \times 10^{-5}$$

Таблица 1. Метод половинного деления

Интервал изоляции [a _i , b _i]	Точность вычислений (ε)	Корень уравнения (x*)	Число итераций (n)	Невязка метода F(x*)
[-0.5, 0]	ε = 0.01	-0.012	6	2.437*10 ⁻³
	ε = 0.001	-0.012	9	4.25*10 ⁻⁴
	ε = 0.0001	-0.012	13	4.753*10 ⁻⁵
[1, 1.5]	ε = 0.01	1.02	6	9.349*10 ⁻³
	ε = 0.001	1.016	9	1.145*10 ⁻³
	ε = 0.0001	1.017	13	7.069*10 ⁻⁵
[3.5, 4]	ε = 0.01	3.996	6	3.232*10 ⁻³
	ε = 0.001	3.996	9	2.599*10 ⁻³
	ε = 0.0001	3.996	13	4.861*10 ⁻⁵

б) Метод Ньютона

$$df1(x) := \frac{d}{dx}F(x) \quad df2(x) := \frac{d^2}{dx^2}F(x)$$

$$mN(F, a, b, \epsilon) := \begin{cases} x \leftarrow a & \text{if } F(a) \cdot df2(a) > 0 \\ x \leftarrow b & \text{otherwise} \\ n \leftarrow 0 \\ \text{while } |F(x)| > \epsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x - \frac{F(x)}{df1(x)} \\ n \leftarrow n + 1 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right) \end{cases}$$

+

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, -0.5, 0, 0.01) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 1.982 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, -0.5, 0, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 1.161 \times 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, -0.5, 0, 0.0001) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 4 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 1.161 \times 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 1, 1.5, 0.01) = \begin{pmatrix} 1.018 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 5.064 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 1, 1.5, 0.001) = \begin{pmatrix} 1.016 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 5.293 \times 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 1, 1.5, 0.0001) = \begin{pmatrix} 1.016 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 5.293 \times 10^{-6}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 3.5, 4, 0.01) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 1.215 \times 10^{-4}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 3.5, 4, 0.001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 1.215 \times 10^{-4}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := mN(F, 3.5, 4, 0.0001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 2 \end{pmatrix} \quad |F(x_k)| = 7.228 \times 10^{-10}$$

Таблица 2. Метод Ньютона

Интервал изоляция [a, b]	Точность вычислений (ε)	Корень уравнения (x*)	Число итераций (n)	Невязка метода F(x*)
[-0.5, 0]	ε = 0.01	-0.013	3	1.982*10 ⁻³
	ε = 0.001	-0.012	4	1.161*10 ⁻⁶
	ε = 0.0001	-0.012	4	1.161*10 ⁻⁶
[1, 1.5]	ε = 0.01	1.018	2	5.064*10 ⁻³
	ε = 0.001	1.016	3	5.293*10 ⁻⁶
	ε = 0.0001	1.016	3	5.293*10 ⁻⁶
[3.5, 4]	ε = 0.01	3.996	1	1.215*10 ⁻⁴
	ε = 0.001	3.996	1	1.215*10 ⁻⁴
	ε = 0.0001	3.996	2	7.228*10 ⁻¹⁰

в) Метод простой итерации

$$\varphi(x, \tau) := x - \tau \cdot F(x)$$

```

mpi(df1, φ, a, b, d, ε) :=
    M ← -106
    m ← 106
    for x ∈ a, a + d .. b
        M ← df1(x) if df1(x) > M
        m ← df1(x) if df1(x) < m
    τ ←  $\frac{2}{M + m}$ 
    xn ←  $\frac{a + b}{2}$ 
    x ← φ(xn, τ)
    n ← 1
    while |x - xn| > ε
        xn ← x
        x ← φ(xn, τ)
        n ← n + 1
     $\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}$ 

```

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, -0.5, 0, 0.02, 0.01) = \begin{pmatrix} -0.015 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 0.012$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, -0.5, 0, 0.02, 0.001) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 1.876 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, -0.5, 0, 0.02, 0.0001) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 1.2 \times 10^{-4}$$

+

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 1, 1.5, 0.02, 0.01) = \begin{pmatrix} 1.018 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 4.679 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 1, 1.5, 0.02, 0.001) = \begin{pmatrix} 1.017 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 1.108 \times 10^{-4}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 1, 1.5, 0.02, 0.0001) = \begin{pmatrix} 1.016 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 1.711 \times 10^{-5}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 3.5, 4, 0.02, 0.01) = \begin{pmatrix} 3.994 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 0.02$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 3.5, 4, 0.02, 0.001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 2.438 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ n \end{pmatrix} := \text{mpi}(\text{df1}, \varphi, 3.5, 4, 0.02, 0.0001) = \begin{pmatrix} 3.996 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$|F(x_k)| = 2.91 \times 10^{-4}$$

Таблица 3. Метод простой итерации

Интервал изоляции [a _i , b _i]	Точность вычислений (ε)	Корень уравнения (x*)	Число итераций (n)	Невязка метода F(x*)
[-0.5, 0]	ε = 0.01	-0.015	4	0.012
	ε = 0.001	-0.013	6	1.876*10 ⁻³
	ε = 0.0001	-0.012	9	1.2*10 ⁻⁴
[1, 1.5]	ε = 0.01	1.018	2	4.679*10 ⁻³
	ε = 0.001	1.017	4	1.108*10 ⁻⁴
	ε = 0.0001	1.016	5	1.711*10 ⁻⁵
[3.5, 4]	ε = 0.01	3.994	4	0.02
	ε = 0.001	3.996	6	2.438*10 ⁻³
	ε = 0.0001	3.996	8	2.91*10 ⁻⁴

Задание 5

Метод решения	Корень уравнения	Число итераций	Невязка метода
Метод половинного деления	1,017	13	7.069*10 ⁻⁵
Метод Ньютона	1,016	3	5.293*10 ⁻⁶
Метод простой итерации	1,016	5	1.711*10 ⁻⁵

- 1). Более точным является метод Ньютона (его невязка равна 5.293*10⁻⁶)
- 2). Метод Ньютона сходится быстрее других методов, т.к. у него требуемая точность достигнута за 3 итерации.

Задание 6

$$\text{TOL} := 10^{-4}$$

$$x_k := \text{root}(F(x), x, 1, 1.5) = 1.016$$

$$|F(x_k)| = 0$$

Решение совпадает

Задание 7

$$v := \begin{pmatrix} 0.05 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.012 \\ 1.016 \\ 3.996 \end{pmatrix}$$

Решение совпадает

$$|F(x_1)| = 0$$

$$|F(x_2)| = 0$$

$$|F(x_3)| = 4.621 \times 10^{-15}$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №11

«РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Задание

Дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax=b$.
Решить систему, используя указанные точные и итерационные методы.

– Точные методы:

- метод Крамера;
- метод обратной матрицы;
- метод Гаусса.

– Итерационные методы:

- метод Якоби;
- метод Гаусса-Зейделя;
- использование вычислительного блока Given/Find.

Провести анализ полученных результатов.

Примечание. Номер варианта задания выбрать из таблицы в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

1. В пакете MathCAD создать файл с именем «СЛАУ».
2. Решить СЛАУ по *формулам Крамера*. Выполнить проверку решения.
3. Решить СЛАУ с использованием *обратной матрицы*. Выполнить проверку решения.
4. Решить СЛАУ *методом Гаусса*. Для решения использовать встроенную функцию ***lsolve***. Выполнить проверку решения.
5. Проверить для заданной системы сходимость итерационного процесса. Для этого составить **П-Ф** проверки условия диагонального преобладания матрицы коэффициентов системы **A**.
6. Составить **П-Ф** решения СЛАУ *методом Якоби*. Получить решение с точностью: **а) $\varepsilon = 0.001$; б) $\varepsilon = 0.0001$** . В обоих случаях выполнить проверку решения.
7. Составить **П-Ф** решения СЛАУ *методом Гаусса-Зейделя*. Получить решение с точностью: **а) $\varepsilon = 0.001$; б) $\varepsilon = 0.0001$** . В обоих случаях выполнить проверку решения.
8. Решить СЛАУ с использованием вычислительного блока **Given/Find**. Выполнить проверку решения.

9. Для $\varepsilon = 0.0001$ сравнить итерационные методы Якоби и Гаусса-Зейделя по точности решения. В качестве критерия используйте максимальную невязку $\max_{1 \leq i \leq n} |b1_i - b_i|$, где $b1 = Ax$.

Метод решения	Максимальная невязка метода
Метод Якоби	
Метод Гаусса-Зейделя	

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Система $Ax=b$	Номер варианта	Система $Ax=b$
1	$\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 4 \end{cases}$	10	$\begin{cases} -8x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 10x_3 = -4 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 15x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 7x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 15x_3 = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ -5x_1 + 12x_2 - 2x_3 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 8x_3 = -5 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 34x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 44x_1 + 20x_2 - 5x_3 = -63 \\ 56x_2 - 2x_3 = 42 \\ -8x_1 - 2x_2 + 14x_3 = 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 50x_1 + x_2 = 34 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 2 \\ 11x_1 + x_2 + 40x_3 = 22 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 35x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 11x_3 = 1 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 = 2 \\ -x_1 + 4x_3 = 3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0.1 \\ 4x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 0.2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 15x_3 = 0.3 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 0.1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0.15 \\ 4x_1 + 4x_2 + 11x_3 = 0.2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 24x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 1 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + 18x_3 = 5 \end{cases}$	17	$\begin{cases} 53x_1 - 6x_2 - 16x_3 = 0.05 \\ 3x_1 + 44x_2 - 13x_3 = 0.2 \\ 8x_1 + 2x_2 + 33x_3 = 0.45 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 36x_1 - 5x_2 - 11x_3 = -9 \\ x_1 + 33x_2 - 11x_3 = -8 \\ 5x_1 - x_2 + 26x_3 = -7 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2.86x_1 + 0.14x_2 - 0.76x_3 = 1 \\ 0.14x_1 + 2.38x_2 - 0.96x_3 = 2 \\ -0.76x_1 - 0.96x_2 + 3.37x_3 = 3 \end{cases}$

Лабораторная работа №11

"Решение системы линейных алгебраических уравнений" (образец)

Задание 2

ORIGIN := 1

Исходные данные

$$A := \begin{pmatrix} 2.86 & 0.14 & -0.76 \\ 0.14 & 2.38 & -0.96 \\ -0.76 & -0.96 & 3.37 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0.14 & -0.76 \\ 2 & 2.38 & -0.96 \\ 3 & -0.96 & 3.37 \end{pmatrix} \quad A_2 := \begin{pmatrix} 2.86 & 1 & -0.76 \\ 0.14 & 2 & -0.96 \\ -0.76 & 3 & 3.37 \end{pmatrix} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 2.86 & 0.14 & 1 \\ 0.14 & 2.38 & 2 \\ -0.76 & -0.96 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 := \frac{|A_1|}{|A|} = 0.663 \quad x_2 := \frac{|A_2|}{|A|} = 1.379 \quad x_3 := \frac{|A_3|}{|A|} = 1.433$$

Проверка

$$b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Решение

$$x := A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Решение

$$x := \text{lsolve}(A, b) = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 5

```

Diag(A, n) := | ierr ← 0
               | for i ∈ 1..n
               |   | S ← 0
               |   | for j ∈ 1..n
               |   |   | S ← S + |Ai,j| if i ≠ j
               |   | if |Ai,i| < S
               |   |   | ierr ← 1
               |   |   | break
               |   | "Условие не выполняется" if ierr = 1
               |   | "Условие выполняется" otherwise

```

Diag(A, 3) = "Условие выполняется"

Задание 6

```

Myakobi(A, b, n, ε) := | for i ∈ 1..n
                       |   | βi ←  $\frac{b_i}{A_{i,i}}$ 
                       |   | for j ∈ 1..n
                       |   |   | Ci,j ← 0 if i = j
                       |   |   | Ci,j ←  $\frac{-A_{i,j}}{A_{i,i}}$  otherwise
                       |   | x ← β
                       |   | maxr ← 100
                       |   | while maxr > ε
                       |   |   | x1 ← C·x + β
                       |   |   | r ←  $\overrightarrow{|x1 - x|}$ 
                       |   |   | maxr ← max(r)
                       |   |   | x ← x1
                       |   | x

```

Решение $x := \text{Myakobi}(A, b, 3, 0.001) = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.432 \end{pmatrix}$

Проверка $b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.999 \\ 2.999 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 3.663 \times 10^{-4} \\ 5.015 \times 10^{-4} \\ 5.634 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$

Решение $x := \text{Myakobi}(A, b, 3, 0.0001) = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$

Проверка $b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 5.919 \times 10^{-5} \\ 8.058 \times 10^{-5} \\ 8.343 \times 10^{-5} \end{pmatrix}$

Задание 7

```

MGZ(A, b, n, ε) :=
    for i ∈ 1 .. n
        βi ←  $\frac{b_i}{A_{i,i}}$ 
        for j ∈ 1 .. n
            Ci,j ← 0 if i = j
            Ci,j ←  $\frac{-A_{i,j}}{A_{i,i}}$  otherwise
    x ← β
    maxr ← 100
    while maxr > ε
        for i ∈ 1 .. n
            x1i ←  $\sum_{j=1}^n (C_{i,j} \cdot x_j) + \beta_i$  if i = 1
            x1i ←  $\sum_{j=1}^{i-1} (C_{i,j} \cdot x1_j) + \sum_{j=i}^n (C_{i,j} \cdot x_j) + \beta_i$  otherwise
        r ←  $\overrightarrow{|x1 - x|}$ 
        maxr ← max(r)
        x ← x1
    x

```

Решение $x := \text{MGZ}(A, b, 3, 0.001) = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$

Проверка $b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 8.133 \times 10^{-5} \\ 2.11 \times 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$

Решение $x := \text{MGZ}(A, b, 3, 0.0001) = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$

Проверка $b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 1.153 \times 10^{-5} \\ 2.994 \times 10^{-5} \\ 0 \end{pmatrix}$

Задание 8

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Given

$$A \cdot x = b$$

$$x := \text{Find}(x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.663 \\ 1.379 \\ 1.433 \end{pmatrix}$$

Проверка

$$b1 := A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{|b1 - b|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 9

Метод решения	Максимальная невязка метода
Метод Якоби	8.343×10^{-5}
Метод Гаусса-Зейделя	2.994×10^{-5}

Метод Гаусса-Зейделя точнее метода Якоби

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №12

«ИНТЕРПОЛЯЦИЯ»

Задание

Для заданного интервала $[a, b]$ и исходной функции $g(x)$ построить узлы интерполяции x_i ; $i=0,1,\dots,N$; ($N=10$ и $N=20$) и вычислить в этих узлах значения функции $f_i=g(x_i)$.

Построить интерполирующую функцию $F(z)$, используя различные методы:

- метод кусочно-постоянной интерполяции (левой и правой).
- метод кусочно-линейной интерполяции.
- кубический интерполяционный сплайн.
- полином Лагранжа.

Для каждого метода:

- а) вычислить значения интерполирующей функции $F(z)$ в произвольной точке $z \in [a, b]$, не совпадающей ни с одним узлом интерполяции, при $N=10$ и $N=20$;
- б) построить график интерполирующей функции на отрезке $[a, b]$ и нанести точки (x_i, f_i) при $N=10$.
- с) найти погрешности метода $r(z)$ при $N=10$ и $N=20$.

Провести анализ полученных результатов.

Примечание. Номер варианта задания выбрать из таблицы в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

1. В пакете MathCAD создать файл с именем «Интерполяция».
2. Для $N=10$ составить П-Ф вывода на интервале $[a, b]$ таблицы значений исходной функции f_i в узлах интерполяции x_i . Таблицу вывести с заголовком следующего вида:

i	$x[i]$	$f[i]$
-----	--------	--------

3. Выполнить пункты а), б), с) задания для следующих методов ($N=10$):
 - метод левой кусочно-постоянной интерполяции;
 - метод правой кусочно-постоянной интерполяции;
 - метод кусочно-линейной интерполяции;
 - кубический интерполяционный сплайн;
 - полином Лагранжа.
4. Для $N=20$ составить П-Ф вывода на интервале $[a, b]$ таблицы значений исходной функции f_i в узлах интерполяции x_i .
5. Выполнить пункты а) и с) задания для указанных выше методов ($N=20$):

6. Составить таблицу следующего вида:

Метод решения	Погрешность метода ($N=10$)	Погрешность метода ($N=20$)
Левая к.-п. интерполяция		
...	...	...

Ответить на следующие вопросы.

- 3) Какой из указанных методов является более *точным*?
- 4) Как зависит точность от числа узлов интерполяции N ?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Исходная функция $g(x)$	[a, b]	Номер варианта	Исходная функция $g(x)$	[a, b]
1	$\frac{1}{2+3x^2}$	[-1, 1]	10	$\frac{1}{1+x^2}$	[-1, 1]
2	$\frac{(3-x^2)^3}{x+1}$	[0, 1]	11	e^x	[-1, 1]
3	$\frac{1-x^3}{x^2}$	[1, 3]	12	$\frac{2}{1-x^2}$	[2, 3]
4	$ \sin(x) $	$[-\pi, \pi]$	13	$(2-x^2)(3-x)$	[-1, 0.5]
5	$ \cos(x) $	$[-\pi, \pi]$	14	$\sin(2x)$	[0, 1]
6	$ x $	[-1, 1]	15	x^3-3x^2+2	[0, 1]
7	$\frac{1-x}{1+x}$	[0, 1]	16	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
8	$\frac{1- x }{1+ x }$	[-1, 1]	17	$2^{-x}-1$	[1, 2]
9	$\operatorname{tg}(x)$	$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$	18	$\frac{5}{\sqrt{1+x^2}}$	[2, 3]

Лабораторная работа №12

"Интерполяция" (образец)

Исходные данные: $g(x) := \frac{5}{\sqrt{1+x^2}}$ $a := 2$ $b := 3$

$N := 10$

Задание 2

$i := 0..N$ $h := \frac{b-a}{N}$ $x_i := a + i \cdot h$ $f_i := g(x_i)$

$T(x,f,N) :=$

$U_{0,0} \leftarrow$	"i"
$U_{0,1} \leftarrow$	"x[i]"
$U_{0,2} \leftarrow$	"f[i]"
for	$i \in 0..N$
$M_{1,0} \leftarrow$	i
$M_{1,1} \leftarrow$	x_i
$M_{1,2} \leftarrow$	f_i
stack	(U,M)

$T(x,f,N) =$

	0	1	2
0	"i"	"x[i]"	"f[i]"
1	0	2	2.236068
2	1	2.1	2.149668
3	2	2.2	2.069015
4	3	2.3	1.993631
5	4	2.4	1.923077
6	5	2.5	1.856953
7	6	2.6	1.794895
8	7	2.7	1.736572
9	8	2.8	1.681682
10	9	2.9	1.629953
11	10	3	1.581139

Задание 3

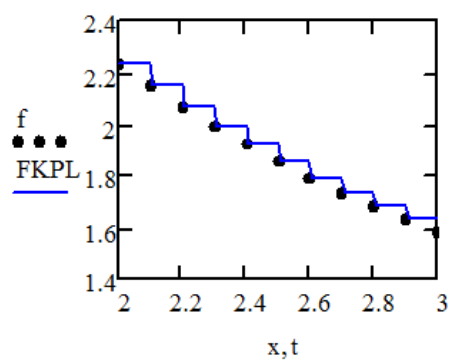
Левая кусочно-постоянная интерполяция

a) $\text{IKPL}(x, f, N, z) :=$
 for $i \in 1..N$
 if $x_{i-1} \leq z \leq x_i$
 $F \leftarrow f_{i-1}$
 break

 $z := 2.32$
 $F_{10}(z) := \text{IKPL}(x, f, 10, z)$
 $F_{10}(z) = 1.993631$

 F

b) $K := 100$ $j := 0..K$
 $h := \frac{b-a}{K}$ $t_j := a + j \cdot h$ $\text{FKPL}_j := \text{IKPL}(x, f, N, t_j)$



c) $r(z) := |g(z) - F_{10}(z)|$ $r(z) = 0.014484$

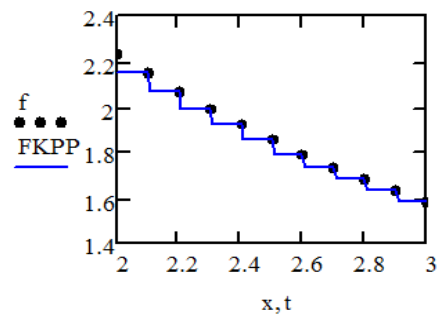
Правая кусочно-постоянная интерполяция

a) $\text{IKPP}(x, f, N, z) :=$ $z := 2.32$

$\text{for } i \in 1..N$ $\text{if } x_{i-1} \leq z \leq x_i$ $\quad F \leftarrow f_i$ $\quad \text{break}$	$F_{10}(z) := \text{IKPP}(x, f, 10, z)$ $F_{10}(z) = 1.923077$
F	

b) $K := 100$ $j := 0..K$

$h := \frac{b-a}{K}$ $t_j := a + j \cdot h$ $\text{FKPP}_j := \text{IKPP}(x, f, N, t_j)$



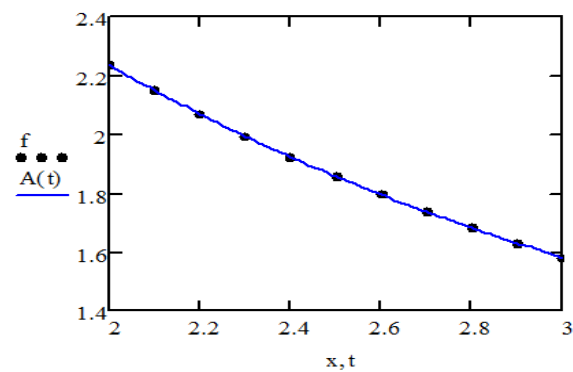
c) $r(z) := |g(z) - F_{10}(z)|$ $r(z) = 0.05607$

Кусочно-линейная интерполяция

a) $\text{IKL}(x, f, N, z) :=$ $z := 2.32$

$\text{for } i \in 1..N$ $\text{if } x_{i-1} \leq z \leq x_i$ $\quad k \leftarrow \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ $\quad l \leftarrow f_{i-1} - k \cdot x_{i-1}$ $\quad F \leftarrow k \cdot z + l$ $\quad \text{break}$	$F_{10}(z) := \text{IKL}(x, f, 10, z)$ $F_{10}(z) = 1.97952$
F	

b) $A(t) := \text{linterp}(x, f, t)$



c) $r(z) := |g(z) - F_{10}(z)|$ $r(z) = 3.73092 \times 10^{-4}$

Кубический интерполяционный сплайн

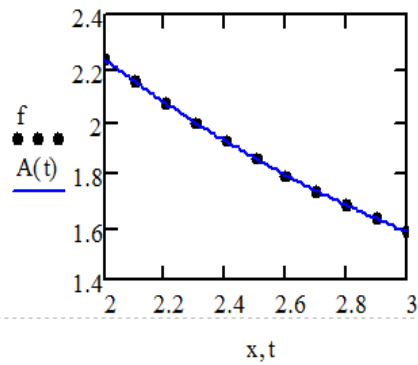
a)

$s := \text{cspline}(x, f)$

$S_{10}(z) := \text{interp}(s, x, f, z)$ $S_{10}(z) = 1.97915$

b)

$A(t) := \text{interp}(s, x, f, t)$



c)

$r(z) := |g(z) - S_{10}(z)|$ $r(z) = 5.74259 \times 10^{-8}$

Полином Лагранжа

a)

```

IPL(x, f, N, z) :=
  L ← 0
  for i ∈ 0..N
    P ← 1
    for k ∈ 0..N
      P ← P ·  $\frac{z - x_k}{x_i - x_k}$  if i ≠ k
    L ← L + fi · P
  L
  
```

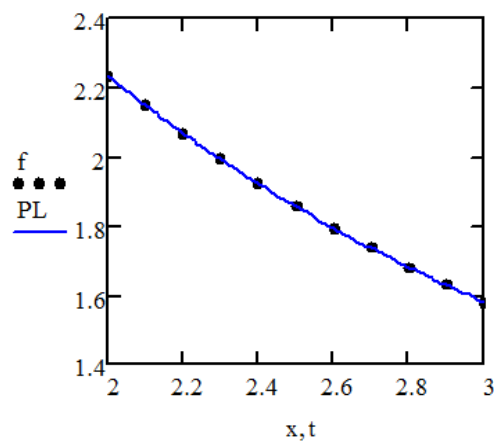
$z := 2.32$

$L_{10}(z) := \text{IPL}(x, f, 10, z)$

$L_{10}(z) = 1.979147$

b)

$K := 100$ $j := 0..K$ $h := \frac{b-a}{K}$ $t_j := a + j \cdot h$ $PL_j := \text{IPL}(x, f, N, t_j)$



+

c)

$r(z) := |g(z) - L_{10}(z)|$ $r(z) = 6.38156 \times 10^{-13}$

Задание 4

$N := 20$

$i := 0 \dots N$ $h := \frac{b-a}{N}$

$x_i := a + i \cdot h$

$f_i := g(x_i)$

$T(x, f, N) :=$

```

U0,0 ← "i"
U0,1 ← "x[i]"
U0,2 ← "f[i]"
for i ∈ 0 .. N
  Mi,0 ← i
  Mi,1 ← xi
  Mi,2 ← fi
stack(U, M)

```

$T(x, f, N) =$

	0	1	2
0	"i"	"x[i]"	"f[i]"
1	0	2	2.236068
2	1	2.05	2.192118
3	2	2.1	2.149668
4	3	2.15	2.108654
5	4	2.2	2.069015
6	5	2.25	2.030692
7	6	2.3	1.993631
8	7	2.35	1.957776
9	8	2.4	1.923077
10	9	2.45	1.889485
11	10	2.5	1.856953
12	11	2.55	1.825438
13	12	2.6	1.794895
14	13	2.65	1.765286
15	14	2.7	1.736572
16	15	2.75	1.708715
17	16	2.8	1.681682
18	17	2.85	1.655439
19	18	2.9	1.629953
20	19	2.95	1.605196
21	20	3	1.581139

Задание 5

Левая кусочно-постоянная интерполяция

a) $z := 2.32$ $F_{20}(z) := \text{IKPL}(x, f, 20, z)$ $F_{20}(z) = 1.993631$

c) $r(z) := |g(z) - F_{20}(z)|$ $r(z) = 0.014484$

Правая кусочно-постоянная интерполяция

a) $z := 2.32$ $F_{20}(z) := \text{IKPP}(x, f, 20, z)$ $F_{20}(z) = 1.957776$

c) $r(z) := |g(z) - F_{20}(z)|$ $r(z) = 0.021371$

Кусочно-линейная интерполяция

a) $z := 2.32$ $F_{20}(z) := \text{IKL}(x, f, 20, z)$ $F_{20}(z) = 1.979289$

c) $r(z) := |g(z) - F_{20}(z)|$ $r(z) = 1.419246 \times 10^{-4}$

Кубический интерполяционный сплайн

a) $s := \text{cspline}(x, f)$ $z := 2.32$
 $S_{20}(z) := \text{interp}(s, x, f, z)$ $S_{20}(z) = 1.97915$

c) $r(z) := |g(z) - S_{20}(z)|$ $r(z) = 5.61608 \times 10^{-9}$

Полином Лагранжа

a) $z := 2.32$ $L_{20}(z) := \text{IPL}(x, f, 20, z)$ $L_{20}(z) = 1.979147$

c) $r(z) := |g(z) - L_{20}(z)|$ $r(z) = 0$

Задание 6

Метод решения	Погрешность (N=10)	Погрешность (N=20)
Левая к.-п. интерполяция	0.014484	0.014484
Правая к.-п. интерполяция	0.05607	0.021371
Кусочно-линейная интерполяция	3.73092×10^{-4}	1.419246×10^{-4}
Кубический интерполяционный сплайн	5.74259×10^{-8}	5.61608×10^{-9}
Полином Лагранжа	6.38156×10^{-13}	0

- 1). Более точным является полином Лагранжа
- 2). С увеличением числа узлов интерполяции точность возрастает.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №13

«МНК. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Часть 1. Подбор полиномиальной зависимости методом наименьших квадратов (МНК)

Задание

Дана система точек (узлов интерполяции) x_i ; $i=1,...,N$ и значения функции f_i ; $i=1,...,N$.

Построить полиномы:

- 1-ой степени $P_1(x)=a_1+a_2x$;
- 2-ой степени $P_2(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$;
- 3-ей степени $P_3(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3$.

Построить графики полиномов и определить, какой из полиномов имеет минимальную сумму квадратов отклонений.

Примечание. Номер варианта задания выбрать из *Таблицы 1* в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

1. В пакете MathCAD создать файл с именем «МНК-Интегрирование».
2. Для каждого полинома (1-ой, 2-ой, 3-ей степени):
 - составить нормальную систему уравнений в общем виде;
 - решить систему методом обратной матрицы;
 - записать полученный полином;
 - вычислить сумму квадратов отклонений.
3. Построить в одной области графики всех полиномов и нанести точки исходных данных. Проанализировать графики.
4. Указать, какой полином имеет минимальную сумму квадратов отклонений.

Часть 2. Численное интегрирование

Задание

Вычислить значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$:

- а) с помощью оператора интегрирования;
- б) с использованием квадратурных формул:
 - левых прямоугольников;
 - правых прямоугольников;
 - средних прямоугольников;
 - трапеций;
 - Симпсона.

Для каждого метода использовать равномерную сетку с числом отрезков разбиения $n=10$; $n=20$; $n=40$. Вычислить погрешности.

Результаты оформить в виде таблиц и провести анализ.

Примечание. Номер варианта задания выбрать из **Таблицы 2** в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

5. В пакете MathCad с помощью оператора интегрирования вычислить значение заданного определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

6. Для каждой квадратурной формулы составить **П-Ф** и вычислить приближенное значение заданного интеграла при $n=10$; $n=20$; $n=40$. Вычислить погрешности. Результат оформить в виде таблицы с заголовком следующего вида:

Формула левых прямоугольников

n	10	20	40
I_{lpr}			
Ψ			

.....

7. Проанализировать результаты вычислений и ответить на следующие вопросы.

- 5) Какая из указанных формул дает более *точный* результат?
- 6) Как зависит точность от величины шага интегрирования?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 1

$\begin{matrix} x \\ f \end{matrix}$	-10	-8.3	-6.7	-5	-3	-1.67	0	1.67	3.33	5	6.7	8.33	10
B1	0.02	0.19	0.4	1	1	0.85	1.02	1.19	1.35	1.5	1.7	1.85	2
B2	21	14.9	9.9	6	3	1.56	1	1.56	3.22	6	9.9	14.9	21
B3	-310	-182	-96	-43	-14	-3.06	0	3.06	14.4	43	96	182	310
B4	-2.98	-2.3	-1.6	-1	0	0.35	1.02	1.69	2.35	3	3.7	4.35	5
B5	51	35.7	23	14	7	2.39	1	2.39	6.56	14	23	35.7	51
B6	-610	-356	-184	-80	-26	-4.44	0	4.44	25.6	80	184	356	610

B7	-5.98	-4.8	-3.6	-2	-1	-0.15	1.02	2.19	3.35	4.5	5.7	6.85	8
B8	81	56.6	37	21	10	3.22	1	3.22	9.89	25.1	37	56.6	81
B9	-100	-60	-33	-16	-7	-2.08	0	2.08	6.67	16	33	60.4	100
B10	-8.98	-7.3	-5.6	-4	-2	-0.65	1.02	2.69	4.35	6	7.7	9.35	11
B11	56	39.2	25	15	7	2.53	1	2.53	7.11	15	25	39.2	56
B12	-70	-43	-24	-13	-6	-1.94	0	1.94	5.56	13	24	43.1	70
B13	-11.98	-9.8	-7.6	-5	-3	-1.15	1.02	3.19	5.35	7.5	9.7	11.9	14
B14	71	49.6	32	19	9	2.94	1	2.94	8.78	19	32	49.6	71
B15	-85	-52	-29	-14	-6	-2.01	0	2.01	6.11	14	29	51.7	85
B16	-14.98	-12	-9.6	-7	-4	-1.65	1.02	3.69	6.35	9	12	14.4	17
B17	86	60	39	22	10	3.36	1	3.36	10.4	22	39	60	86
B18	-70	-43	-24	-13	-6	-1.94	0	1.94	5.56	13	24	43.1	70

Таблица 2

Номер варианта	Интеграл $\int_a^b f(x)dx$	Номер варианта	Интеграл $\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_2^3 \frac{2}{1-x^2} dx$	10	$\int_0^5 \sqrt[3]{x^2} dx$
2	$\int_{-1}^1 \frac{1-x}{1+x^2} dx$	11	$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \frac{1}{2} \cos(2x)) dx$
3	$\int_2^3 \frac{1}{1+x^2} dx$	12	$\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \frac{1}{3} \sin(3x)) dx$
4	$\int_{-1}^{0.5} \frac{2-x^2}{3-x} dx$	13	$\int_1^3 \frac{1}{1+x} dx$
5	$\int_0^1 \sin(2x) dx$	14	$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2) dx$
6	$\int_0^2 (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$	15	$\int_1^2 (2^{-x} - 1) dx$

7	$\int_{0.3}^{1.5} \frac{1}{\sin^2 x} dx$	16	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$
8	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} dx$	17	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$
9	$\int_{-1}^1 e^x dx$	18	$\int_{0.5}^2 \frac{1-x}{x} dx$

Лабораторная работа №13 "МНК. Численное интегрирование" (образец)

Часть 1. Подбор полиномиальной зависимости МНК

Исходные данные:

ORIGIN := 1

N := 13

$$x := \begin{pmatrix} -10 \\ -8.3 \\ -6.7 \\ -5 \\ -3 \\ -1.67 \\ 0 \\ 1.67 \\ 3.33 \\ 5 \\ 6.7 \\ 8.33 \\ 10 \end{pmatrix} \quad f := \begin{pmatrix} -70 \\ -43 \\ -24 \\ -13 \\ -6 \\ -1.94 \\ 0 \\ 1.94 \\ 5.56 \\ 13 \\ 24 \\ 43.1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Полином 1-ой степени

Нормальная система

$$N \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N x_i \cdot a_2 = \sum_{i=1}^N f_i$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_2 = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i)$$

Решим нормальную систему методом обратной матрицы

$$X := \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f_i \\ \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i) \end{bmatrix}$$

$$a := X^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} -0.16967 \\ 5.18254 \end{pmatrix}$$

+

Вид полинома:

$$P_1(x) := -0.16967 + 5.18254 \cdot x$$

Сумма квадратов отклонений: $\sum_{i=1}^N (P_1(x_i) - f_i)^2 = 1.54188 \times 10^3$

Полином 2-ой степени

Нормальная система

$$N \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N x_i \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^N f_i$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i)$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \cdot a_3 = \sum_{i=1}^N \left[(x_i)^2 \cdot f_i \right]$$

Решим нормальную систему методом обратной матрицы

$$X := \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N (x_i)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \\ \sum_{i=1}^N (x_i)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i)^3 & \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f_i \\ \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i) \\ \sum_{i=1}^N \left[(x_i)^2 \cdot f_i \right] \end{bmatrix}$$

$$a := X^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} -0.26397 \\ 5.18253 \\ 2.43357 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Вид полинома: $P_2(x) := -0.26397 + 5.18253 \cdot x + 2.43357 \times 10^{-3} \cdot x^2$

Сумма квадратов отклонений: $\sum_{i=1}^N \left(P_2(x_i) - f_i \right)^2 = 1.54179 \times 10^3$

Полином 3-ей степени

Нормальная система

$$N \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N x_i \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_3 + \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_4 = \sum_{i=1}^N f_i$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_3 + \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \cdot a_4 = \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i)$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i)^2 \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \cdot a_3 + \sum_{i=1}^N (x_i)^5 \cdot a_4 = \sum_{i=1}^N [(x_i)^2 \cdot f_i]$$

$$\sum_{i=1}^N (x_i)^3 \cdot a_1 + \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \cdot a_2 + \sum_{i=1}^N (x_i)^5 \cdot a_3 + \sum_{i=1}^N (x_i)^6 \cdot a_4 = \sum_{i=1}^N [(x_i)^3 \cdot f_i]$$

Решим нормальную систему методом обратной матрицы

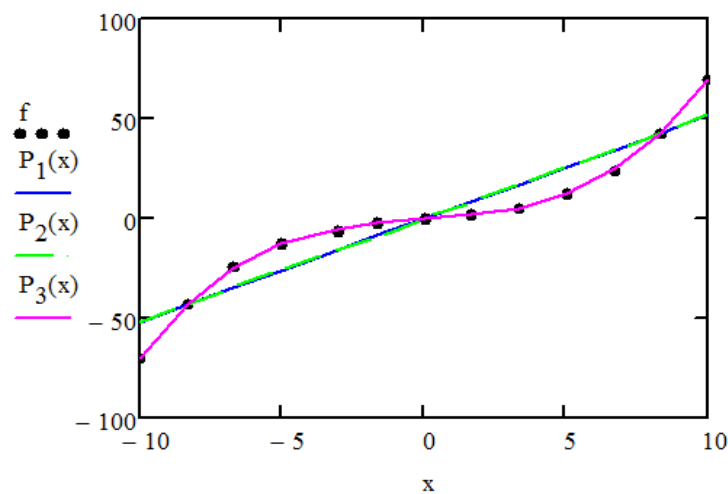
$$X := \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N (x_i)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i)^3 \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N (x_i)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i)^3 & \sum_{i=1}^N (x_i)^4 \\ \sum_{i=1}^N (x_i)^2 & \sum_{i=1}^N (x_i)^3 & \sum_{i=1}^N (x_i)^4 & \sum_{i=1}^N (x_i)^5 \\ \sum_{i=1}^N (x_i)^3 & \sum_{i=1}^N (x_i)^4 & \sum_{i=1}^N (x_i)^5 & \sum_{i=1}^N (x_i)^6 \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N f_i \\ \sum_{i=1}^N (x_i \cdot f_i) \\ \sum_{i=1}^N [(x_i)^2 \cdot f_i] \\ \sum_{i=1}^N [(x_i)^3 \cdot f_i] \end{bmatrix}$$

$$a := X^{-1} \cdot F = \begin{pmatrix} -0.20769 \\ 1.04341 \\ 2.03293 \times 10^{-3} \\ 0.05947 \end{pmatrix}$$

Вид полинома: $P_3(x) := -0.20769 + 1.04341 \cdot x + 2.03293 \times 10^{-3} \cdot x^2 + 0.05947 \cdot x^3$

Сумма квадратов отклонений: $\sum_{i=1}^N (P_3(x_i) - f_i)^2 = 3.25751$

Задание 3



Из графика видно, что полином 3-ей степени наиболее близко подходит к исходным точкам.

Задание 4

Минимальную сумму квадратов отклонений имеет полином 3-ей степени

Часть 2. Численное интегрирование

Задание 5

ORIGIN := 0

$$f(x) := \frac{1-x}{x}$$

$$I_0 := \int_{0.5}^2 f(x) dx = -0.11371$$

Формула левых прямоугольников

$$I(f, a, b, n) := \begin{cases} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{cases} x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ S \leftarrow S + f(x_i) \end{cases} \\ S \leftarrow h \cdot S \\ S \end{cases}$$

$$I_{L_pr} := I(f, 0.5, 2, 10) = 5.76103 \times 10^{-3}$$

$$\psi := |I_{L_pr} - I_0| = 0.11947$$

$$I_{L_pr} := I(f, 0.5, 2, 20) = -0.0557$$

$$\psi := |I_{L_pr} - I_0| = 0.058$$

$$I_{L_pr} := I(f, 0.5, 2, 40) = -0.08514$$

$$\psi := |I_{L_pr} - I_0| = 0.02856$$

n	10	20	40
I_{L_pr}	5.76103×10^{-3}	-0.0557	-0.08514
ψ	0.11947	0.058	0.02856

Формула правых прямоугольников

$$\begin{array}{l}
 \text{I(f,a,b,n)} := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ S \leftarrow S + f(x_i) \end{array} \right. \\ S \leftarrow h \cdot S \\ S \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 I_{p_pr} := I(f, 0.5, 2, 10) = -0.21924 \\
 \psi := |I_{p_pr} - I_0| = 0.10553 \\
 \\
 I_{p_pr} := I(f, 0.5, 2, 20) = -0.1682 \\
 \psi := |I_{p_pr} - I_0| = 0.0545 \\
 \\
 I_{p_pr} := I(f, 0.5, 2, 40) = -0.14139 \\
 \psi := |I_{p_pr} - I_0| = 0.02769
 \end{array}$$

n	10	20	40
I_{p_pr}	-0.21924	-0.1682	-0.14139
ψ	0.10553	0.0545	0.02769

Формула средних прямоугольников

$$\begin{array}{l}
 \text{I(f,a,b,n)} := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ S \leftarrow S + f\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \end{array} \right. \\ S \leftarrow h \cdot S \\ S \end{array} \right.
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 I_{c_pr} := I(f, 0.5, 2, 10) = -0.21924 \\
 \psi := |I_{c_pr} - I_0| = 0.10553 \\
 \\
 I_{c_pr} := I(f, 0.5, 2, 20) = -0.11458 \\
 \psi := |I_{c_pr} - I_0| = 8.75272 \times 10^{-4} \\
 \\
 I_{c_pr} := I(f, 0.5, 2, 40) = -0.11393 \\
 \psi := |I_{c_pr} - I_0| = 2.19497 \times 10^{-4}
 \end{array}$$

n	10	20	40
I_{c_pr}	-0.21924	-0.11458	-0.11393
ψ	0.10553	8.75272×10^{-4}	2.19497×10^{-4}

Формула трапеций

$$\begin{aligned}
 I_{\text{tr}}(f, a, b, n) := & \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ S \leftarrow S + f(x_i) \end{array} \right. \\ S \leftarrow h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + S \right) \\ S \end{array} \right. \\
 I_{\text{tr}} := & I(f, 0.5, 2, 10) = -0.11716 \\
 \psi := & |I_{\text{tr}} - I_0| = 3.45936 \times 10^{-3} \\
 I_{\text{tr}} := & I(f, 0.5, 2, 20) = -0.11195 \\
 \psi := & |I_{\text{tr}} - I_0| = 1.75365 \times 10^{-3} \\
 I_{\text{tr}} := & I(f, 0.5, 2, 40) = -0.11327 \\
 \psi := & |I_{\text{tr}} - I_0| = 4.39191 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

n	10	20	40
I_{tr}	-0.11716	-0.11195	-0.11327
ψ	3.45936×10^{-3}	1.75365×10^{-3}	4.39191×10^{-4}

Формула Симпсона

$$\begin{aligned}
 I_{\text{simp}}(f, a, b, n) := & \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n \\ \quad x_i \leftarrow a + i \cdot h \\ S \leftarrow \frac{h}{6} \sum_{i=1}^n \left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) \\ S \end{array} \right. \\
 I_{\text{simp}} := & I(f, 0.5, 2, 10) = -0.11369 \\
 \psi := & |I_{\text{simp}} - I_0| = 1.59829 \times 10^{-5} \\
 I_{\text{simp}} := & I(f, 0.5, 2, 20) = -0.1137 \\
 \psi := & |I_{\text{simp}} - I_0| = 1.03678 \times 10^{-6} \\
 I_{\text{simp}} := & I(f, 0.5, 2, 40) = -0.11371 \\
 \psi := & |I_{\text{simp}} - I_0| = 6.54412 \times 10^{-8}
 \end{aligned}$$

n	10	20	40
I_{simp}	-0.11369	-0.1137	-0.11371
ψ	1.59829×10^{-5}	1.03678×10^{-6}	6.54412×10^{-8}

Задание 6

- 1) Формула Симпсона дает наиболее точный результат. При $n=40$ значение интеграла полностью совпадает с интегралом, рассчитанным с помощью оператора интегрирования в пакете MathCad.
- 2) Для любого метода точность возрастает с уменьшением шага интегрирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №14

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДУ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

Задание

Задача Коши для ОДУ первого порядка имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad a \leq x \leq b; \quad y(a) = y_0$$

Точное решение задано функцией $y(x)$.

Проверить, является ли заданная функция $y(x)$ точным решением, удовлетворяющим начальному условию $y(a) = y_0$.

Решить задачу Коши с числом узлов $N=10, 20, 40$, используя различные методы:

- метод Эйлера;
- модифицированный метод Эйлера;
- метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Для каждого метода:

- d) вычислить максимальную ошибку при $N=10, 20, 40$;
- e) при $N=10$ построить в одной области графики найденного решения и нанести точки точного решения $y(x_i)$;
- f) сравнить приближенные решения, полученные по этим методам, с точным решением и проследить поведение максимальной ошибки в зависимости от значения параметра N .

Примечание. Номер варианта задания выбрать из таблицы в соответствии с номером компьютера, на котором выполняется задание.

Выполнение задания

1. В пакете MathCAD создать файл с именем «ОДУ».
2. Проверить, удовлетворяет ли заданная функция $y(x)$ начальному условию.
3. Составить П-Ф решения задачи Коши методом Эйлера и получить решение при $N=10, N=20, N=40$.
4. Составить П-Ф решения задачи Коши с помощью модифицированного метода Эйлера и получить решение при $N=10, N=20, N=40$.
5. Используя стандартную функцию *rkfixed*, решить задачу Коши методом Рунге-Кутты 4-го порядка при $N=10, N=20, N=40$.
6. Составить П-Ф вычисления максимальной ошибки решения задачи Коши и найти для каждого метода максимальную ошибку при $N=10, N=20, N=40$.

7. Построить в одной области при $N=10$ графики полученного решения для каждого метода и нанести точки функции точного решения $y(x)$ в узлах заданного интервала $[a, b]$.
8. Проанализировать результаты и ответить на следующие вопросы.
- 7) Какой из указанных методов является более *точным*?
- 8) Как зависит точность от числа узлов сетки N ?

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Номер варианта	Правая часть, $f(x,y)$	$[a, b]$	y_0	Точное решение, $y(x)$
1	$2x - y + x^2$	$[0, 2]$	0	x^2
2	$\frac{y}{x} - \frac{4}{x^2}$	$[1, 3]$	2	$\frac{2}{x}$
3	$\frac{2}{1 - x^2}$	$[0, \pi/2]$	0	$-\sin x$
4	$0.5(\cos^2 x - y^2) - \sin x$	$[0, \pi/2]$	1	$\cos x$
5	$3x - 0.5xy + x^3$	$[0, 2]$	-2	$2(x^2 - 1)$
6	$x(2 + x^2 \sin x^2 - y \sin y)$	$[-2, 0]$	4	x^2
7	$0.5(\sin^2 x - y^2) + \cos x$	$[0, \pi/2]$	0	$\sin x$
8	$\sqrt{y} + 1.5x^2 - \sqrt{0.5x^3}$	$[1, 2]$	0.5	$0.5x^3$
9	$\frac{y}{x} - \frac{8}{x^2}$	$[2, 5]$	2	$\frac{4}{x}$
10	$\cos^2 x - y^2 - \sin x$	$[0, \pi/2]$	1	$\cos x$
11	$\cos^2 x - \frac{y^2}{4} - 2 \sin x$	$[0, \pi/2]$	2	$2 \cos x$
12	$x^3 - y + 3x^2$	$[0, 2]$	0	x^3
13	$2(x - 2) + x(x - 2)^2 - xy$	$[2, 4]$	0	$(x - 2)^2$
14	$x - y^2 + \frac{x^4}{4}$	$[0, 2]$	0	$\frac{x^2}{2}$
15	$2x - xy + x^3$	$[1, 2]$	1	x^2
16	$1.5x^2 - 0.5x^5 + x^2y$	$[0, 2]$	0	$\frac{x^3}{2}$
17	$x^3 - xy + 3x$	$[2, 3]$	5	$x^2 + 1$
18	$0.72x - \sqrt{y}$	$[1, 5]$	0.16	$0.16x^2$

Лабораторная работа №14 "ОДУ" (образец)

Исходные данные:

$$f(x,y) := 0.72 \cdot x - \sqrt{y} \quad a := 1 \quad b := 5 \quad y_0 := 0.16 \quad y(x) := 0.16 \cdot x^2$$

Задание 2 $y(a) = 0.16$

Задание 3

```
Eyler(f,y0,a,b,n) :=
  h ← (b - a) / n
  x0 ← a
  y0 ← y0
  for i ∈ 0..n - 1
    y_{i+1} ← y_i + h · f(x_i, y_i)
    x_{i+1} ← x_i + h
  augment(x,y)
```

E10 := Eyler(f,y0,a,b,10) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.4	0.288
2	1.8	0.47654
3	2.2	0.71881
4	2.6	1.01328
5	3	1.35943
6	3.4	1.75705
7	3.8	2.20604
8	4.2	2.70633
9	4.6	3.25789
10	5	3.86071

$$E20 := \text{Euler}(f, y_0, a, b, 20) =$$

	0	1
0	1	0.16
1	1.2	0.224
2	1.4	0.30214
3	1.6	0.39381
4	1.8	0.4987
5	2	0.61666
6	2.2	0.74761
7	2.4	0.89148
8	2.6	1.04824
9	2.8	1.21787
10	3	1.40036
11	3.2	1.59569
12	3.4	1.80385
13	3.6	2.02483
14	3.8	2.25864
15	4	...

$$E40 := \text{Euler}(f, y_0, a, b, 40) =$$

	0	1
0	1	0.16
1	1.1	0.192
2	1.2	0.22738
3	1.3	0.2661
4	1.4	0.30811
5	1.5	0.35341
6	1.6	0.40196
7	1.7	0.45376
8	1.8	0.5088
9	1.9	0.56707
10	2	0.62856
11	2.1	0.69328
12	2.2	0.76122
13	2.3	0.83237
14	2.4	0.90673
15	2.5	...

Задание 4

$\text{Meyler}(f, y_0, a, b, n) :=$

$$\begin{array}{l}
 h \leftarrow \frac{b - a}{n} \\
 x_0 \leftarrow a \\
 y_0 \leftarrow y_0 \\
 \text{for } i \in 0 \dots n - 1 \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\
 x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\
 y_{i+1} \leftarrow y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}))
 \end{array} \right. \\
 \text{augment}(x, y)
 \end{array}$$

+

ME10 := Meyler(f, y0, a, b, 10) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.4	0.31827
2	1.8	0.52541
3	2.2	0.78279
4	2.6	1.09088
5	3	1.44991
6	3.4	1.85996
7	3.8	2.3211
8	4.2	2.83337
9	4.6	3.39679
10	5	4.01136

ME20 := Meyler(f, y0, a, b, 20) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.2	0.23107
2	1.4	0.31473
3	1.6	0.41106
4	1.8	0.5201
5	2	0.64189
6	2.2	0.77645
7	2.4	0.92377
8	2.6	1.08387
9	2.8	1.25676
10	3	1.44243
11	3.2	1.64089
12	3.4	1.85214
13	3.6	2.07619
14	3.8	2.31303
15	4	...

ME40 := Meyler(f,y0,a,b,40) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.1	0.19369
2	1.2	0.23057
3	1.3	0.27063
4	1.4	0.31388
5	1.5	0.36032
6	1.6	0.40996
7	1.7	0.46279
8	1.8	0.51882
9	1.9	0.57805
10	2	0.64047
11	2.1	0.70609
12	2.2	0.77491
13	2.3	0.84692
14	2.4	0.92214
15	2.5	...

Задание 5

R10 := rkfixed(y0,a,b,10,f) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.4	0.31362
2	1.8	0.51842
3	2.2	0.77442
4	2.6	1.08162
5	3	1.44002
6	3.4	1.84962
7	3.8	2.31042
8	4.2	2.82241
9	4.6	3.38561
10	5	4.00001

R20 := rkfixed(y0,a,b,20,f) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.2	0.2304
2	1.4	0.3136
3	1.6	0.4096
4	1.8	0.5184
5	2	0.64
6	2.2	0.7744
7	2.4	0.9216
8	2.6	1.0816
9	2.8	1.2544
10	3	1.44
11	3.2	1.6384
12	3.4	1.8496
13	3.6	2.0736
14	3.8	2.3104
15	4	...

R40 := rkfixed(y0,a,b,40,f) =

	0	1
0	1	0.16
1	1.1	0.1936
2	1.2	0.2304
3	1.3	0.2704
4	1.4	0.3136
5	1.5	0.36
6	1.6	0.4096
7	1.7	0.4624
8	1.8	0.5184
9	1.9	0.5776
10	2	0.64
11	2.1	0.7056
12	2.2	0.7744
13	2.3	0.8464
14	2.4	0.9216
15	2.5	...

Задание 6

$$\text{Pmax}(y, Z, n) := \left| \begin{array}{l} \max \leftarrow -10^6 \\ \text{for } i \in 0 \dots n \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow |Z_{i,1} - y(Z_{i,0})| \\ \max \leftarrow c \text{ if } c > \max \end{array} \right. \\ \max \end{array} \right|$$

Метод Эйлера

$$\text{MaxOshE10} := \text{Pmax}(y, \text{E10}, 10) = 0.13929$$

$$\text{MaxOshE20} := \text{Pmax}(y, \text{E20}, 20) = 0.06943$$

$$\text{MaxOshE40} := \text{Pmax}(y, \text{E40}, 40) = 0.03466$$

Модифицированный метод Эйлера

$$\text{MaxOshME10} := \text{Pmax}(y, \text{ME10}, 10) = 0.01136$$

$$\text{MaxOshME20} := \text{Pmax}(y, \text{ME20}, 20) = 2.80241 \times 10^{-3}$$

$$\text{MaxOshME40} := \text{Pmax}(y, \text{ME40}, 40) = 6.96559 \times 10^{-4}$$

Метод Рунге-Кутты 4 порядка

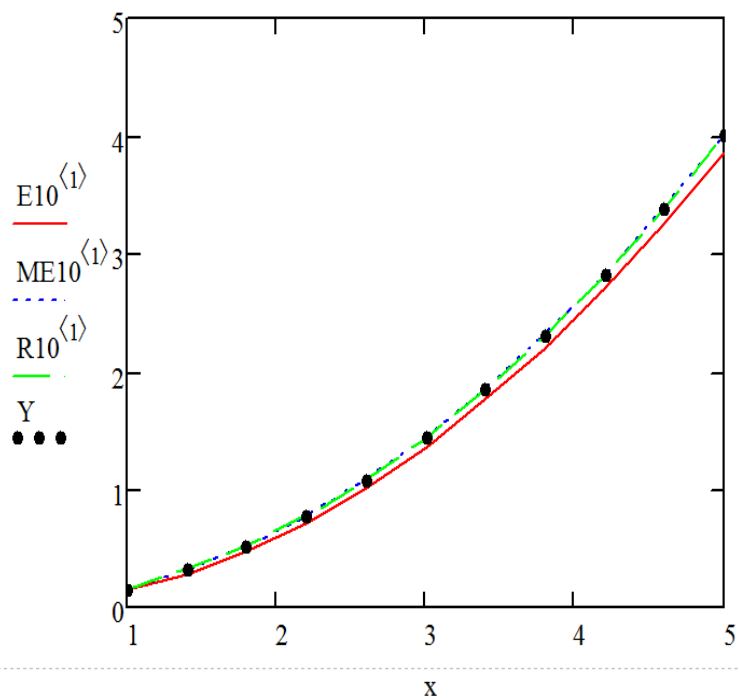
$$\text{MaxOshR10} := \text{Pmax}(y, \text{R10}, 10) = 2.2568 \times 10^{-5}$$

$$\text{MaxOshR20} := \text{Pmax}(y, \text{R20}, 20) = 1.32117 \times 10^{-6}$$

$$\text{MaxOshR40} := \text{Pmax}(y, \text{R40}, 40) = 7.99092 \times 10^{-8}$$

Задание 7

$$n := 10 \quad h := \frac{b-a}{n} \quad i := 0 \dots n \quad x_i := a + i \cdot h \quad Y_i := y(x_i)$$



- 1). Более точным является метод Рунге-Кутты 4 порядка⁺
- 2). С увеличением числа узлов сетки точность возрастает.